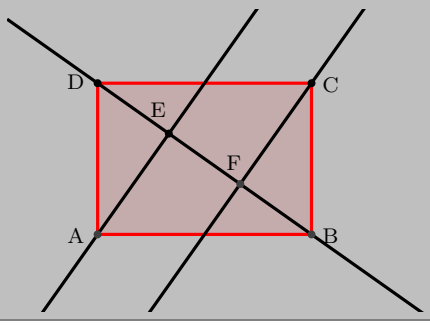
DÉFI 1

ABCD est un rectangle avec AD = 1.
(AE) et (CF) sont perpendiculaires à (BD) et DE = EF = FB. Calculer AB.



Soit I l'intersection de (CF) et (AB). On note BD $= x$ et AB $= y$.
On a DE = EF = FB $= \dfrac{x}{3}$.

D'après le théorème de Thalès appliqué au triangle BAE et BIF, I est le milieu de [AB] et FI $= \dfrac{1}{2}$AE.
Donc BI $= \dfrac{y}{2}$.

On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle ABD rectangle en A : $\boxed{x^2 = 1 + y^2}$.

Avec le théorème de Pythagore dans le triangle ADE rectangle en E : $\text{AE}^2 = 1^2 - \left(\dfrac{x}{3}\right)^2$ soit $\text{AE}^2 = 1 - \dfrac{x^2}{9}$ soit $\text{AE} = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{9}}$.

On en déduit que $\text{FI} = \dfrac{1}{2}\text{AE} = \dfrac{1}{2}\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{9}}$.

Avec le théorème de Pythagore dans le triangle BIF rectangle en F :

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^2$$

soit $\dfrac{y^2}{4} = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{x^2}{9}\right) + \dfrac{x^2}{9}$

soit $y^2 = 1 - \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{4x^2}{9}$

soit $y^2 = 1 + \dfrac{x^2}{3}$

En utilisant $x^2 = 1 + y^2$, on obtient $y^2 = 1 + \dfrac{1 + y^2}{3}$

soit $3y^2 = 3 + 1 + y^2$

ce qui donne $2y^2 = 4$

soit $y^2 = 2$

On en déduit que $\boxed{y = \sqrt{2}}$.

Autre rédaction possible : on note AB $= x$ et DE = EF = FB $= a$.

On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle :

- AED rectangle en E : $\text{DE}^2 + \text{EA}^2 = \text{AD}^2$ soit $a^2 + \text{AE}^2 = 1$ d'où $\text{AE}^2 = 1 - a^2$ (1).

- AEB rectangle en E : $\mathrm{EB}^2 + \mathrm{EA}^2 = \mathrm{AB}^2$ soit $4a^2 + \mathrm{AE}^2 = x^2$. (2)
- ABD rectangle en A : $\mathrm{AD}^2 + \mathrm{AB}^2 = \mathrm{BD}^2$ soit $1 + x^2 = 9a^2$. (3)

Avec (1) et 2, on obtient : $4a^2 + 1 - a^2 = x^2$ soit $3a^2 = x^2 - 1$ soit $a^2 = \dfrac{1}{3}(x^2 - 1)$ (4).

Avec (3) et (4), on obtient : $1 + x^2 = 9 \times \dfrac{1}{3}(x^2 - 1)$ soit $1 + x^2 = 3\,(x^2 - 1)$ (5).

D'après (5) : $1 + 3 = 3x^2 - x^2$ soit $4 = 2x^2$ soit $x^2 = 2$.

Comme x est une longueur, on en déduit que $\boxed{x = \mathrm{AB} = \sqrt{2}}$.

DÉFI 2

x, y et z sont trois nombres réels positifs tels que

$$x = \sqrt{11 - 2yz} \qquad y = \sqrt{12 - 2xz} \qquad z = \sqrt{13 - 2xy}$$

Combien vaut $x + y + z$?

On a $x^2 = 11 - 2yz$, $y^2 = 12 - 2xz$ et $z^2 = 13 - 2xy$.
On a donc $x^2 + y^2 + z^2 = 36 - 2xy - 2xz - 2yz$.
Soit $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 36$.

Or $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$.

On en déduit que $(x + y + z)^2 = 36$. Comme x, y et z sont positifs, on a alors $\boxed{x + y + z = 6}$.

DÉFI 3

Lors de la semaine des mathématiques, Manon, Amine, Thomas, Hugo et Solène jouent au jeu qu'ils ont créé en classe. À la fin de la partie, il n'y a que des gagnants ou des perdants.

1. Manon et Hugo sont soit tous les deux gagnants, soit tous les deux perdants.
2. Si Amine est perdante, alors Solène est gagnante.
3. Si Thomas est gagnant, alors Manon est perdante.
4. Parmi Thomas et Hugo, un seul est gagnant.
5. Si Solène est gagnante, Manon est perdante et réciproquement.
6. Amine et Thomas sont tous les deux en même temps gagnants ou perdants.

Qui sont les gagnants ?

On ne garde que les initiales de chacun.
On note M l'événement « Manon gagne » et $\overline{M}$ l'événement « Manon » perd.
Et on fait de même pour les autres.

Supposons Manon gagne soit M.
Alors d'après 1, on a H.
D'après 4, on a alors $\overline{T}$.
D'après 6, on a ensuite $\overline{A}$.
D'après 2, on a aussi S. Ce qui contredit l'affirmation 5.

Donc Manon est perdante ! Partons donc de $\overline{M}$.
Alors d'après 1, on a $\overline{H}$.
D'après 4, on a alors T.
D'après 6, on a ensuite A.
D'après 5 (la réciproque), on a aussi S.
Les affirmations 2 et 3 sont aussi vérifiées.

Les gagnants sont donc Thomas, Amine et Solène.

DÉFI 4

```
FONCTIONS_UTILISEES
VARIABLES
N EST_DU_TYPE NOMBRE
h EST_DU_TYPE NOMBRE
r EST_DU_TYPE NOMBRE
s EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
    AFFICHER "Entrer le nombre de sphères : "
    LIRE N
    s PREND_LA_VALEUR 1
    h PREND_LA_VALEUR 0
    r PREND_LA_VALEUR N
    TANT_QUE (N>=s) FAIRE
        DEBUT_TANT_QUE
        r PREND_LA_VALEUR N-s
        h PREND_LA_VALEUR h+1
        s PREND_LA_VALEUR s+(h+1)*(h+1)
        FIN_TANT_QUE
    AFFICHER "Nombre de niveaux : "
    AFFICHER h
    AFFICHER "Nombre de sphères restantes : "
    AFFICHER r
FIN_ALGORITHME
```

```
N=float(input("Nombre de sphères = "))
nb=1
niveau=0
reste=N
while N >=nb :
    reste=N - nb
    niveau=niveau+1
    nb=nb+(niveau+1)**2
print("Tu peux faire une pyramide à ", niveau,"niveaux")
print("Il reste ", reste," sphères")
```